

文章编号: 1000-8055(2005)01-0164-05

复杂系统可靠性评定先验分布的 样条函数估计

刘琦, 冯静, 周经伦

(国防科技大学 信息系统与管理学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 在经验Bayes理论的基础上, 研究了利用样条函数拟合系统任务可靠度先验分布的方法。对Weibull指数和二项分布的三种试验结果, 给出Bayes方法可靠性计算公式。最后给出的一个实例表明, 该方法计算简便, 便于工程应用。

关键词: 航空、航天推进系统; Bayes分析; 可靠性评定; 经验Bayes; 样条函数

中图分类号: O 231.2

文献标识码: A

Spline Function Assessment of Prior Distribution for Complex System Bayesian Reliability Evaluation

LIU Qi, FENG Jing, ZHOU Jing-lun

(School of Information System and Management,

National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To acquire proper prior distribution is a key problem in complex system Bayesian reliability evaluation. Based on the empirical Bayes theory, a spline density fitting for the prior function of system's mission reliability was studied. The reliability test data based on Weibull, exponential and binomial distribution model was analyzed, and reliability evaluation formula was presented. Finally an example was given to show this method is simple in calculation and usable for engineering application.

Key words: aerospace propulsion system; Bayesian analysis; reliability evaluation; empirical Bayes; spline function

经验Bayes的概念由Robbines^[1,2]提出, 他在不对先验分布做任何假设的前提下给出参数的Bayes估计, 也就是说在经验Bayes过程中未知参数的先验分布形式是未知的。已经有多篇文章对经验Bayes进行了探讨, 并且对一些特殊的分布函数族进行了估计, 例如正态分布、均匀分布、Pareto分布、指数分布等。当系统寿命服从单参

数指数分布时, 文献[3]利用样条函数理论给出失效率先验分布的经验Bayes表示, 但该方法进行后验分析时用到失效率的充分统计量, 这就给该方法的应用带来极大的困难。例如当系统的寿命分布为Weibull分布, 其系统的现场试验样本量较小或者试验中无失效数据时, 无法求出参数的极大似然估计, 或者得不出极大似然估计的分布

收稿日期: 2004-03-28; **修订日期:** 2004-08-25

作者简介: 刘琦(1974-), 男, 山西运城人, 国防科技大学信息系统与管理学院讲师, 博士, 主要从事小子样复杂系统的可靠性分析、武器装备的试验鉴定研究

函数。

本文基于经验 Bayes 理论, 运用非参数样条密度函数, 估计出系统在任务时间 t_0 时任务可靠度 R 的先验分布 $\pi(R)$ 。进而结合少量的现场试验数据, 运用 Bayes 方法对系统任务可靠性指标进行分析。

选择样条密度函数主要是考虑如下两点: (1) 它可以给出未知参数先验分布的简单形式, 并且在该分布的基础上可以得到参数后验的简单解析分布形式; (2) 该先验分布有助于我们得出参数解析形式的经验 Bayes 估计和后验风险。

假设系统进行了 n 次独立试验, 这些试验可能是仿真试验、类似产品试验、加速寿命试验等。通过分析、折合^[1], 可得到与现场试验环境一致条件下的系统试验数据。在进行了第 $n+1$ 次试验 (为现场试验) 后, 需要对系统的可靠性进行评定。此时可以运用 Bayes 方法, 通过前 n 次试验得出系统可靠性的先验分布, 再结合第 $n+1$ 次试验数

据, 运用 Bayes 公式进行分析。在先验信息分析过程中, 针对不同的数据采集方式, 可以得出不同的试验结果。例如对于截尾时间为 t_0 的定时截尾寿命试验, 第 i ($i=1, \cdots, n$) 次试验中, 样本容量为 n_i , 所得到的样本试验时间分别为 $t_{i1}, \cdots, t_{ir_i}, t_{ir_i+1}, \cdots, t_{in_i}$, 其中 r_i 为失效次数, $t_{ir_i+1} = \cdots = t_{in_i} = t_0$ 。若系统的试验数据为任务时间 t_0 的成败型试验, 则得到的试验数据为 (n_i, r_i) 。前 n 次试验任务可靠性 R 的估计 $\hat{R}_i$ ($i=1, \cdots, n$) 可以通过运用极大似然法等方法分析得出, 也可由专家信息等途径分析得出。本文以极大似然估计为例说明了不同的试验数据, 任务时间 t_0 的可靠度 R 的经验 Bayes 分析方法。

1 先验密度估计

在寿命型试验数据中, 若系统的寿命分布为 Weibull 分布, 则由极大似然法^[1]可以得出形状参数 β 和尺度参数 α 的估计分别为:

$$\hat{\beta}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i \left[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{\beta}} \ln t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i}^{\hat{\beta}} \ln t_{ir_i} \right]}{\sum_{i=1}^n r_i \left[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{\beta}} + (n_i - r_i) t_{ir_i}^{\hat{\beta}} \right] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} \ln t_{ij}} \tag{1}$$

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n r_i \left[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{\beta}} + (n_i - r_i) t_{ir_i}^{\hat{\beta}} \right]}{r_i} \right]^{1/\hat{\beta}} \tag{2}$$

进一步, 通过迭代求解 $\hat{\beta}$, 可得出系统的任务可靠性估计为:

$$\hat{R}_i = \exp \left[- \left(\frac{t_0}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} \right] \tag{3}$$

$(i=1, \cdots, n)$

若系统的寿命分布为指数分布, 则由极大似然法可以得出失效率的估计为:

$$\hat{\lambda} = r_i / \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} \tag{4}$$

进一步, 得出系统的任务可靠性 R 的估计为:

$$\hat{R}_i = \exp (- \hat{\lambda} t_0) \tag{5}$$

在成败型试验数据 (n_i, r_i) 下, 可以直接得到系统任务可靠性 R 的极大似然估计为:

$$\hat{R}_i = 1 - \frac{r_i}{n_i} \tag{6}$$

类似地, 对于对数正态分布等其它连续型的寿命分布函数, 可以得出其参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$, 进一步得出任务可靠性 R 的估计 $\hat{R}_i(\hat{\theta}, t_0)$ 。

在考虑上面验前数据的情况下, Ciesielsk^[4]

与 Krzykowski^[5]提出了阶数 $k \geq 2$ 的样条密度估计, 该估计具有良好的优良性, 这里引入组成步骤所需的基本公式。

由参数 R 极大似然估计 $\hat{R}_1, \cdots, \hat{R}_n$ 得出 R 的 k 阶样条密度函数记为 $\hat{\pi}(R)$, 如下所示。

$$\hat{\pi}(R) = \sum_{s=s_0}^{s_n} a_{s,h} N_{s,h}^{(k)}(R) \tag{7}$$

$R \in \mathfrak{B} \subset [0, 1]$

其中:

$$s_0 = \left\lceil \frac{R_{\min}}{h} - v \right\rceil - k$$
$$s_m = \left\lceil \frac{R_{\max}}{h} - v \right\rceil + 1$$

其中:

$$v = 0 \quad (\text{若 } k \text{ 为偶数}),$$
$$v = 0.5 \quad (\text{若 } k \text{ 为奇数})$$

$$a_{s,h} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_{s,h}^{(k)}(\hat{R}_j)$$

$s = s_0, s_0 + 1, \cdots, s_m$ (8)



$$N_{s,h}^{(k)}(R) = \begin{cases} N_1(R) & R \in A_1 = [(s+v)h, (s+v+1)h] \\ N_2(R) & R \in A_2 = [(s+v+1)h, (s+v+2)h] \\ \vdots \\ N_j(R) & R \in A_i = [(s+v+j-1)h, (s+v+j)h] \\ \vdots \\ N_k(R) & R \in A_i = [(s+v+k-1)h, (s+v+k)h] \\ \vdots \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (9)$$

$$N_j(R) = k \sum_{i=j}^k \frac{(-1)^{k-i}}{i! (k-i)!} \left[(s+v+i) - \frac{R}{h} \right]^{k-1} \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (10)$$

且 Krzykowski^[5]证明, 当选择如下所示的窗口函数时, $\pi(R)$ 在所有 $R \in \mathfrak{E}$ 上以概率 1 接近真实的验前密度函数。

$$h = \sqrt{\frac{6}{kn(n-1)} \sum_{j=1}^n (\hat{R}_j - \bar{R})^2} \quad (11)$$

其中:

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{R}_j$$

2 经验 Bayes 估计

得出系统任务可靠性 R 的先验分布 $\hat{\pi}(R)$ 后, 即可以此为基础, 结合第 $n+1$ 次试验数据, 进行系统可靠性的 Bayes 分析, 下面分别对指数分布、Weibull 分布和二项分布进行分析。当系统寿命分布为其它寿命分布类时, 可类似进行分析。

在复杂系统的研制过程中, 由于产品的可靠性通常较高, 而且试验成本较大, 因此投入的样本量较小, 每个样本投试的时间较长(加延试验)。设系统的第 $n+1$ 次试验为逐步随机截尾试验^[6], 其截尾时间共有 m 个, 分别为 $t_1, \dots, t_m$ 。记 $N_i (i=1, \dots, m)$ 为第 $n+1$ 次试验中在 $t_i (i=1, \dots, m)$ 时刻所投入的样本量, $k_i (i=1, \dots, m)$ 为失效个数, 将试验的结果记为 Data, 则似然函数为:

$$L(\text{Data} | R_1, \dots, R_m) = \prod_{i=1}^m (1 - R_i)^{k_i} R_i^{N_i - k_i} \quad (12)$$

其中: $R_i = R(t_i) (i=1, \dots, m)$ 为系统在 t_i 时刻的可靠度, 系统的寿命分布通常取指数分布、Weibull 分布两种形式。下面分别进行说明。

$$L(\text{Data} | R) = \left[\prod_{j=1}^r \left(-\frac{\ln R}{t_0} R^{(\tau_j/t_0)} \right) \right] \left(\prod_{i=1}^m R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)} \right) \quad (17)$$

$$L(\text{Data} | R) = \left[\prod_{j=1}^r \frac{\hat{\beta}}{\tau_j} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \left(\frac{\tau_j}{t_0} \right)^{\hat{\beta}} R^{(\tau_j/t_0)^{\hat{\beta}}} \right] \left(\prod_{i=1}^m R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)^{\hat{\beta}}} \right) \quad (18)$$

当系统的寿命分布为指数分布时, 由:

$$R = \exp(-\lambda t_0)$$

则:

$$R_i = e^{-\lambda t_i} = R^{t_i/t_0}$$

得出似然函数为:

$$L(\text{Data} | R) = \prod_{i=1}^m (1 - R^{t_i/t_0})^{k_i} R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)} \quad (13)$$

当系统的寿命分布 Weibull 分布时, 由 $R = \exp[-(t_0/\alpha)^\beta]$, 在 Weibull 分布形状参数 β 给定的条件下, $R_i = e^{-(t_i/\alpha)^\beta} = R^{(t_i/t_0)^\beta}$, 则(12)式的似然函数改写为:

$$L(\text{Data} | R, \beta) = \prod_{i=1}^m (1 - R^{(t_i/t_0)^\beta})^{k_i} R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)^\beta} \quad (14)$$

将 β 的极大似然估计 $\hat{\beta}$ 代入(14)式, 得出:

$$L(\text{Data} | R) = \prod_{i=1}^m (1 - R^{(t_i/t_0)^{\hat{\beta}}})^{k_i} R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)^{\hat{\beta}}} \quad (15)$$

当 $m=1, t_m=t_0$ 时即为常见的定时截尾寿命试验, 可以运用二项分布参数的 Bayes 分析方法进行分析, 此时(12)所示的似然函数简化为:

$$L(\text{Data} | R) = (1 - R)^{k_1} R^{(N_1 - k_1)} \quad (16)$$

在指数分布和 Weibull 分布两种寿命试验

下, 定义 $r = \sum_{i=1}^m k_i$, 若已知系统的 r 次失效的失效时间 $\tau_j (j=1, 2, \dots, r)$, 则式(13)和式(15)的似然函数分别为:

3 第 n+ 1 次试验后系统可靠性的后验推断

在式(14~ 18)所示的似然函数下, 系统可靠度 R 的后验分布^[2]为:

$$\pi(R \mid \text{Data}) = \frac{\hat{\pi}(R)L(\text{Data} \mid R)}{\int_{\Theta_R} \hat{\pi}(R)L(\text{Data} \mid R) dR}$$
 (19)

其中: Θ_R 为 R 的定义区间。

运用式(19)可计算得到系统可靠度的点估计、置信区间估计等^[1]。当系统试验无失效数据时, 令 $k_i = 0, (i= 1, \cdots, m)$ 代入(19)式计算即可。

将(7)代入(19)得到:

$$\pi(R \mid \text{Data}) = \frac{\sum_{s=s_0}^{s_m} a_{s,h} N_{s,h}^{(k)}(R)L(\text{Data} \mid R)}{\int_{\Theta_R} \hat{\pi}(R)L(\text{Data} \mid R) dR} = \sum_{s=s_0}^{s_m} a_{s,h}^* M_{s,h}^{(k)}(R)$$
 (20)

其中:

$$M_{s,h}^{(k)}(R) = N_{s,h}^{(k)}(R)L(\text{Data} \mid R), \quad s = s_0, s_0 + 1, \cdots, s_m$$
 (21)

$$a_{s,h}^* = \frac{a_{s,h}}{I(0)}, \quad s = s_0, s_0 + 1, \cdots, s_m$$
 (22)

$$I(0) = \int_{\Theta_R} \hat{\pi}(R)L(\text{Data} \mid R) dR = \sum_{s=s_0}^{s_m} a_{s,h} \int_{\Theta_R} N_{s,h}^{(k)}(R)L(\text{Data} \mid R) dR$$
 (23)

得出 R 的 Bayes 估计为:

$$R_B = I(1)/I(0)$$
 (24)

R 的方差为:

$$\text{var} = I(2)/I(0) - [I(1)/I(0)]^2$$
 (25)

其中:

$$I(1) = \int_{\Theta_R} R \hat{\pi}(R)L(\text{Data} \mid R) dR = \sum_{s=s_0}^{s_m} a_{s,h} \int_{\Theta_R} R N_{s,h}^{(k)}(R)L(\text{Data} \mid R) dR$$
 (26)

$$I(2) = \int_{\Theta_R} R^2 \hat{\pi}(R)L(\text{Data} \mid R) dR = \sum_{s=s_0}^{s_m} a_{s,h} \int_{\Theta_R} R^2 N_{s,h}^{(k)}(R)L(\text{Data} \mid R) dR$$
 (27)

4 仿真实例

考虑如下的例子, 以此检验基于 k 阶样条密度函数的经验 Bayes 估计的可行性和优良性, 以及考察 k 对估计结果的影响, 现采用如下的步骤进行:

(1) 假设对尺度参数 α 为 31.625 6, 形状参数 β 为 2 的 Weibull 分布进行寿命试验, 仿真试验次数为 $n= 10$, 每次试验所含样本数 n_i 由极大似然法分别得出 10 个尺度参数的估计 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{10}$ 为 32.930 8, 33.168 1, 33.553 9, 30.290 8, 30.430 7, 34.712 7, 38.927 6, 31.010 4, 32.618 3, 27.525 5。形状参数的估计为 1.999 9。

(2) 由公式(3)得出任务时间为 10 h 可靠性

的估计为 0.911 9, 0.913 1, 0.915 0, 0.896 7, 0.897 6, 0.920 4, 0.936 1, 0.901 2, 0.910 3, 0.876 3。

(3) 由式(7)得出区间 $[a, b] = [R_{min} - kh, R_{max} + (k+ 1)h]$ 上的 R 的样条函数估计 $\pi(R)$ 。

(4) 通过仿真得到系统的第 11 次试验数据为截尾数据, 截尾时间为 10 Hour, 得到 10 个样本, 其中 2 个失效, 失效时间分别为 9.023 7 h, 9.314 9 h。

(5) 由 $\pi(R)$ 及式(20)求出经验后分布 $\pi(R \mid \text{Data})$ 。

(6) 由式(24)和(25)得出 R 的 Bayes 估计和方差。计算得出如表 1 所示的任务可靠性评定结果。图 1 和图 2 分别给出当 $k= 2$ 和 $k= 10$ 的先

后验密度函数图示。

从表 1 可以看出随着样条函数阶数 k 的增加 Bayes 估计的方差逐渐减小。由图 1、2 可以看出, 随着 k 的增加, 密度函数的平滑程度增强。

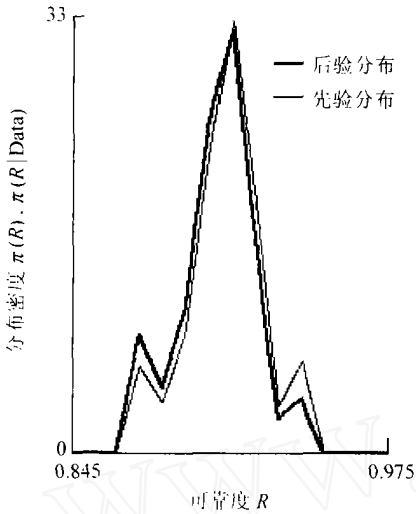


图 1 $k=2$ 时先、后验分布密度函数

Fig 1 The prior, posterior pdf of R when $k=2$

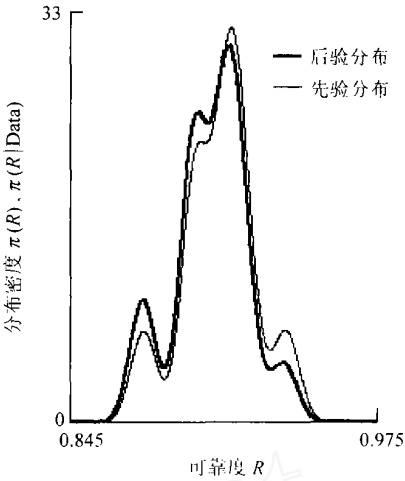


图 2 $k=10$ 时先、后验分布密度函数

Fig 2 The prior, posterior pdf of R when $k=10$

由真实数据, 系统的任务可靠性为 0.904 8。由极大似然法的出系统的任务可靠性估计为 0.816 8, 将试验数据作为成败型试验结果进行分析, 得到任务可靠性为 0.8, 从评估结果表 1 可看出该方法的估计精度较高。

表 1 不同阶数 k 下系统可靠性分析结果

Table 1 The system reliability analysis result at different degree k

k	$[a, b]$	$\hat{R}_B$	$\text{Var}(\times 10^{-4})$
2	[0.857 3, 0.964 6]	0.904 77	2.565 25
3	[0.853 2, 0.966 9]	0.904 75	2.569 68
4	[0.849 5, 0.969 6]	0.904 75	2.568 81
5	[0.846 3, 0.972 1]	0.904 75	2.568 80
6	[0.843 3, 0.974 6]	0.904 75	2.568 79
7	[0.840 6, 0.976 9]	0.904 75	2.568 79
8	[0.838 7, 0.978 4]	0.904 75	2.568 78
9	[0.835 8, 0.981 1]	0.904 75	2.568 78
10	[0.834 3, 0.982 3]	0.904 75	2.568 78

参考文献

[1] 张金槐,唐雪梅 Bayes 方法[M]. 湖南 长沙: 国防科技大学出版社, 1990

[2] James O. Berger. Statistical decision theory and Bayesian analysis (second edition) [M]. Springer-Verlag New York, Inc., 1985

[3] Franciszek Grabski, Ammar Sarhan. Empirical Bayes estimation in the case of exponential reliability [J].

Reliability Engineering and System Safety 53(1996): 105~113

[4] Ciesielski Z. A asymptotic nonparametric spline density estimation[J]. Probab Math. Statist, 12(1991): 1~24

[5] Krzykow ski G. Equivalent conditions for the nonparametric spline density estimators, Probab [J]. Math. Statist, 13 (1992): 269~276

[6] 梅启智,廖炯生,孙惠中. 系统可靠性工程基础[M]. 北京: 科学出版社, 1992